Théorème de Burnside

Théorème 1. *Un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement si G est d'exposant fini.*

Démonstration. :
<u>**Etape 1 :**</u> Supposons que G est un sous-groupe fini de cardinal d de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors, d'après *le théorème de Lagrange*, on a pour tout $A \in G, A^d = \mathrm{I}_n$ et G est d'exposant fini e, où $e \mid d$.

<u>**Etape 2 :**</u> *Inversement*, supposons que G est un sous-groupe d'exposant fini e de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors, tout élément $A \in G$, vérifie $A^e - \mathrm{I}_n = 0$ et en particulier $X^e - 1 \in \mathbb{C}[X]$ est un *polynôme annulateur* de tous les éléments de G. Comme $X^e - 1 \in \mathbb{C}[X]$ est *scindé à racines simples*, on en déduit que tous les éléments $A \in G$ sont *diagonalisables* et pour $A \in G$, les racines du polynôme caractéristique χ_A étant racine du polynôme annulateur $X^e - 1$ on en déduit que les valeurs propres de A sont des racines e-ème de l'unité.

Méthode 1. *Pour montrer que G est un groupe fini, on va construire une application* injective $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}^r$ *pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$ et montrer que son image $\phi(G)$ est de* cardinal fini. *Par injectivité on aura bien* $\mathrm{card}(G) \leq \mathrm{card}(\phi(G)) < \infty \Longrightarrow \mathrm{card}(G) < \infty$.

On note $\mathrm{vect}(G)$, le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par G, c'est en particulier un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de *dimension finie*, comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par constuction, les éléments de G constituent une famille *génératrice* de $\mathrm{vect}(G)$ et on peut donc en extraire *une sous-famille finie à la fois libre et génératrice* $C_1, \ldots, C_r \in G$ qui constituera *une base* du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{vect}(G)$. Ainsi tout $A \in G \subset \mathrm{vect}(G)$, sera combinaison linéaire *non triviale* des éléments $C_1, \ldots, C_r$.

<u>**Etape 3 :**</u> On définit l'application $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}^r$ par $\phi(A) = (\mathrm{Tr}(AC_1), \mathrm{Tr}(AC_2), \ldots, \mathrm{Tr}(AC_r))$.

Objectif 1. *montrons que ϕ est injective.*

Soit $A, B \in G$ tels que $\phi(A) = \phi(B)$, alors pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $\mathrm{Tr}(AC_i) = \mathrm{Tr}(BC_i)$. Pour $M \in G \subset \mathrm{vect}(G)$ on a $M = \alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_r C_r \in G$ et par linéarité de la trace :

$$\mathrm{Tr}(AM) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathrm{Tr}(AC_i) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathrm{Tr}(BC_i) = \mathrm{Tr}(BM)$$

Considérons $N = AB^{-1} - \mathrm{I}_n$. Puisque $A, B \in G$, on a $AB^{-1} \in G$ qui est diagonalisable d'après ce qu'on a vu et il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $AB^{-1} = PDP^{-1}$ où D est diagonale et donc :

$$AB^{-1} - \mathrm{I}_n = PDP^{-1} - \mathrm{I}_n = PDP^{-1} - PP^{-1} = P(D - \mathrm{I}_n)P^{-1} \text{ où } D - \mathrm{I}_n \text{ est diagonale.}$$

Alors, $AB^{-1} - \mathrm{I}_n$ est aussi *diagonalisable* et si l'on montre qu'elle est nilpotente, elle sera *nulle* ce qui donnera bien $AB^{-1} - \mathrm{I}_n = 0 \Longrightarrow A = B \Longrightarrow \phi$ injective. Pour montrer que $AB^{-1} - \mathrm{I}_n$ est *nilpotente*, nous aurons besoin d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, A est nilpotente $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.*

Démonstration. Si A est nilpotente, alors sa seule valeur propre est 0 et A étant trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont *tous nuls.* Alors,

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(T) = 0 \text{ et pour tout } p \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Tr}(A^p) = \mathrm{Tr}(T^p) = 0.$$

Inversement, supposons que $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$. Ecrivons χ_A sous la forme :

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^{\alpha} (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

où $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont *non nuls* et *deux à deux distincts.*

Objectif : montrer que $\alpha = n$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$ *ie* que 0 est la seule valeur propre de A. Alors, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et semblable à une matrice T donc les coefficients diagonaux sont $(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ où 0 apparait α fois et chaque λ_i, α_i fois. De même, pour $p \in [\![1, n]\!]$, A^p est trigonalisable, semblable à T^p, avec comme coefficients diagonaux $(0, \lambda_1^p, \ldots, \lambda_r^p)$ où 0 apparait α fois et chaque λ_i^p, α_i fois. On en déduit donc :

$$\mathrm{Tr}(A^p) = \mathrm{Tr}(T^p) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i^p, \text{ pour } p \in [\![1, n]\!] \ (r \leq n \text{ car } A \text{ a au plus } n \text{ valeurs propres } \neq)$$

Supposons par l'absurde que A n'est pas nilpotente *ie* que 0 n'est pas la seule valeur propre de A. Alors, $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ est *un zéro non trivial* du système S d'inconnue $(x_1,\dots,x_r)$:

$$(S)\quad \begin{array}{lcl} \lambda_1 x_1 & +\dots+ & \lambda_r x_r = 0 \\ \lambda_1^2 x_1 & +\dots+ & \lambda_r^2 x_r = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r x_1 & +\dots+ & \lambda_r^r x_r = 0 \end{array}$$

et *le déterminant* associé à ce système linéaire $r\times r$ est donc *nul*, car la matrice associée au système est non inversible puisqu'elle admet un vecteur $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ non nul dans son noyau. Or, le déterminant du système linéaire est :

$$V=\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \lambda_1\dots\lambda_r \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\dots\lambda_r)\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Les λ_i étant non nuls et deux à deux distincts, on obtient $V\neq 0$, absurde. □

Revenons à la démonstration du théorème, il s'agit donc désormais de montrer via le lemme précédent que $\mathrm{Tr}(N^p)=0$ pour $p\in[\![1,n]\!]$. Or, comme AB^{-1} et I_n *commutent*, par la formule du binôme, on a :

$$N^p=(AB^{-1}-\mathrm{I}_n)^p=\sum_{k=0}^{p} C_p^k(-1)^{p-k}(AB^{-1})^p.$$

Montrons alors que $\mathrm{Tr}((AB^{-1})^p)=\mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n)=n$ pour $p\in[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}((AB^{-1})^p) &= \mathrm{Tr}\left((AB^{-1})(AB^{-1})^{p-1}\right) \\ &= \mathrm{Tr}(A(B^{-1}(AB^{-1})^{p-1})) \\ &= \mathrm{Tr}(B(B^{-1}(AB^{-1})^{p-1})) \text{ car } \mathrm{Tr}(AM)=\mathrm{Tr}(BM), \forall M\in G \\ &= \mathrm{Tr}((AB^{-1})^{p-1}) \end{aligned}$$

et par une récurrence décroissante immédiate, on a $\mathrm{Tr}((AB^{-1})^p)=\mathrm{Tr}((AB^{-1})^0)=\mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n)=n$. Finalement, par linéarité de la trace :

$$\mathrm{Tr}(N^p)=\sum_{k=0}^{p} C_p^k(-1)^{p-k}\mathrm{Tr}((AB^{-1})^p)=\sum_{k=0}^{p} C_p^k(-1)^{p-k}n=n\sum_{k=0}^{p} C_p^k(-1)^{p-k}=n(1-1)^p=0$$

et N est nilpotente et diagonalisable, donc nulle et ϕ injective.

Conclusion : Les éléments de G étant tous diagonalisables, avec pour valeurs propres des racines e-ème de l'unité, il n'y a donc qu'un nombre fini de valeurs propres. L'ensemble $\{\mathrm{Tr}(A)\mid A\in G\}$ des traces des éléments de G est donc également *fini*, du fait que la trace d'une matrice $A\in G$ soit exactement la somme de ces valeurs propres, valeurs propres qui sont toutes à prendre dans l'ensemble fini $\mathbb{U}_e$. Comme $C_1,\dots,C_r\in G$, $\{\mathrm{Tr}(AC_i)\mid A\in G, i\in[\![1,r]\!]\}$ est fini et $\phi(G)$ également. Alors, par injectivité de ϕ, G est un groupe fini. □

Rappel 1. *Une matrice nilpotente et diagonalisable est nécessairement la matrice nulle.*

<u>**Références :**</u> Alessandri. Thèmes en géométrie. Groupes en situations géométriques.

<u>**Leçons concernés :**</u>

- Groupes finis, exemples et applications.
- Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupe de $GL(E)$.
- Endormorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.